

28.12.2014

מכון טכנולוגי לישראל  
המרכז ללימודים קדם-אקדמיים**בחינת גמר במתמטיקה**

הנחיות לנבחן:

- א. משך הבחינה 3½ שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.  
יש לרשום מהי כיתת האם על המתברת.  
ב. יש לפתור שתיים מהשאלות 1-3, שאלה 6 ואחת מהשאלות 4 או 5, שתיים מהשאלות 7-9.  
תיבדקנה רק התשובות הראשונות בכל מקבץ של שאלות בחירה.  
ג. מותר להשתמש בדפי הנוסחאות המצורפים בלבד.  
ד. בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן.  
ה. כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה.  
ו. כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה.

שאלה 1 (17%)

עבור אילו ערכים של  $m$  יש למשוואה  $9^{|m|} + (1-2m)3^{|m|} + m(m-2.5) = 0$  שני פתרונות ממשיים? האם יתכן שלמשוואה זו יש שלושה פתרונות?

שאלה 2 (17%)

צייר שוקמת (סקיצה) של גרף הפונקציה  $f(x) = |x-1|e^{-2x}$ . על הגרף סמן נקודות קיצון, נקודות פיתול, נקודות חיתוך עם הצירים. האם לגרף יש אסימפטוטות?

שאלה 3 (17%)

10% א. בפיתוח של הבינום  $\left(\sqrt{2^{10(10-3^x)}} + \sqrt[3]{2^{(x-2)18}}\right)^n$  המקדמים הבינומיאליים השני, השלישי והרביעי מתסוף

הם בהתאמה האיבר הראשון, השלישי והחמישי בסדרה חשבונית. מצא את כל הערכים של  $x$  עבורם האיבר

השישי בפיתוח של הבינום (על פי הנוסחה:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ ) שווה 21.

7% ב. סדרת מספרים מוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה:  $a_{k+1} = 2a_k - 4k + 5, k \in \mathbb{N}; a_1 = 9$ . הוכח באינדוקציה כי

$$a_n = 3 \times 2^n + 4n - 1, n \in \mathbb{N}$$

\* \* \* \* \*

שאלה 4 (16%)

8% א. פתור:  $4 \log_2^2 \cos x + \log_2(1 + \cos 2x) \geq 3$  בקטע  $[0, 2\pi]$ .

8% ב. פתור:  $\cos^2(x+40^\circ) + \cos^2(x-40^\circ) - \sin 10^\circ \cos 2x = 2 \sin 2x$

שאלה 5 (16%)

7% א. הוכח כי שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.

9% ב.  $CF$  ו- $AE$  הם גבהים במשולש חד זווית  $ABC$  ( $F \in AB, E \in BC$ ),  $Q = AE \cap CF$ . דרך

נקודות  $B$  ו- $Q$  מעבירים ישר שחותך את המעגל החוסם בנקודה  $B_1$ . נתון:  $\angle CAB_1 = \angle FCB$ .

הוכח כי  $\triangle ABC$  הוא משולש שווה שוקיים.

שאלה 6 (16%) חובה

בפירמידה קטומה  $ABCA_1B_1C_1$  מקצוע  $AA_1$  מאונך לבסיסים  $ABC$  ו- $A_1B_1C_1$ . שתי פאות  $AA_1B_1B$

ו- $AA_1C_1C$  חופפות והזווית ביניהן שווה ל- $\beta$ ,  $\angle ABB_1 = \alpha$ ,  $AB = a$ ,  $A_1B_1 = a_1$  ( $a > a_1$ ).

9% א. מצא את שטח הטרפז  $BCC_1B_1$ .

7% ב. מצא את סגנגס הזווית בין הפאה  $BCC_1B_1$  ומישור הבסיס.

\* \* \* \* \*

שאלה 7 (17%)

בפירמידה SABCD הנסיים ABCD הוא מקבילית,  $\overline{AB} = \{2, -1, -1\}$ ,  $\overline{BC} = \{1, 2, -8\}$ ,  $A(1, 2, -1)$ , נקודה  $M(-1, 2, 1)$  מחלקת את המקצוע AS ביחס 2:1 (AM:MS).

6% א. רשום את משוואת הישר שעליו מונח גובה הפירמידה.

6% ב. מצא את אורך הגובה SK.

5% ג. חשב את היחס בין נפחי הפירמידות SABCD ו-MABCD ( $V_{MABCD} : V_{SABCD}$ ).

שאלה 8 (17%)

10% א. רדיוס של המעגל החסום במשולש ABC שווה 2 ומרכזו ברביע הראשון. צלע AB מונחת על הישר  $3x - 4y = 12$  וחוצה זווית A מונח על הישר  $y = x - 2$ . מצא את משוואת המעגל החסום ומשוואת ישר שעליו מונחת צלע AC.

7% ב. כשמחלקים פולינום  $P_1(x)$  ב-  $(2x - 1)$  מקבלים שארית 6, כשמחלקים אותו פולינום  $P_1(x)$  ב-  $(x + 0.5)$

מקבלים שארית 2. מה תהיה שארית אם נחלק פולינום  $P_2(x) = (x+1)P_1(x)$  ב-  $(4x^2 - 1)$ ?

שאלה 9 (17%)

10% א. צייר במישור המרוכב את כל הנקודות  $z = x + iy$  ( $x, y$  ממשיים)

המקיימות  $\frac{|z-i|}{|z+1|} \geq 1$ ,  $\text{Im}(2-iz) > 0$ ,  $|z+1| \leq 9$ .

7% ב. כמה מספרים בני חמש ספרות שונות ניתן להרכיב מהספרות 1,2,3,4,5,6,7,8,9 בתנאי שהספרה האחרונה במספר (ספרת אחדות) לא תהיה 9? האם מספר האפשרויות האלה קטן מ- 13,500?

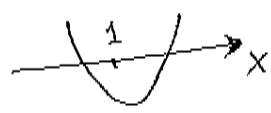
**בהצלחה!**

28.12.14 7N2 1) 11W

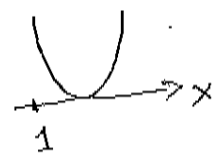
$$9^{|x|} + (1-2m) \cdot 3^{|x|} + m(m-2.5) = 0 \quad (1)$$

$$3^{|x|} = t: \quad t^2 + (1-2m)t + m(m-2.5) = 0$$

$$\Delta = (1-2m)^2 - 4m(m-2.5) = 1 + 6m \quad \text{: 1) 11W 12) 1e 1c}$$



$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{11W} \\ f(1) < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2a} > 1 \end{cases}$$

$$m = -\frac{1}{6}$$

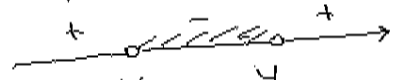
$$\frac{2m-1}{2} > 1 \Rightarrow m > \frac{3}{2}$$

$\phi$

$$1 + 1 - 2m + m(m-2.5) < 0$$

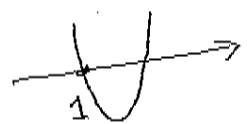
$$m^2 - 4.5m + 2 < 0$$

$$m_1 = 4 \quad m_2 = \frac{1}{2}$$



$$\boxed{\frac{1}{2} < m < 4}$$

: 11W 12)



: 11W 12) 1e 1c

$$y(1) = 0 \Rightarrow m_1 = 4, m_2 = \frac{1}{2}$$

$$m_1 = 4: \quad t^2 - 7t + 6 = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = 6$$

p'icAN

$$m_2 = \frac{1}{2}: \quad t^2 - 1 = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = -1$$

p'icAN 1c

$$\boxed{m = 4}$$

: 11W 12)

$$f(x) = |x-1| e^{-2x}$$

$$x=0 \Rightarrow y=1$$

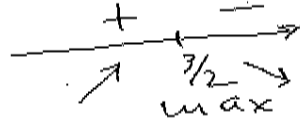
$$y=0 \Rightarrow x=1$$

(2)

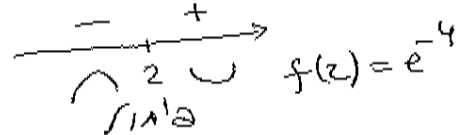
$$f(x) = (x-1)e^{-2x} \quad x \geq 1 \text{ .lc}$$

$$f' = e^{-2x} + (x-1)e^{-2x}(-2) = (3-2x)e^{-2x}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-3}$$

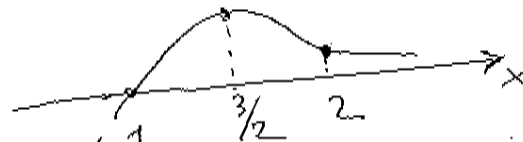


$$f'' = -2e^{-2x} + (3-2x)e^{-2x}(-2) = (4x-8)e^{-2x}$$



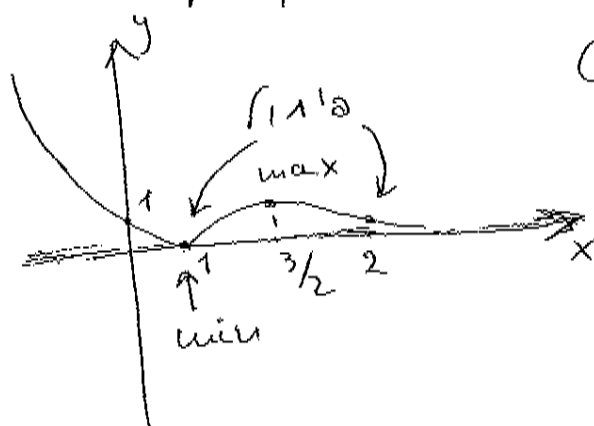
$$w = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{x})e^{-2x} = 0$$

$$u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ f\"allt ab}$$



$$f(x) = -(x-1)e^{-2x} \quad x < 1 \text{ .a}$$

praktisch f\"ur die "x" n, 3a f\"ur die



$$(1,0), (2, e^{-4}) : \text{Sattel}$$

$$(1,0), \left(\frac{3}{2}, \frac{e^{-3}}{2}\right) : \text{Min}$$

$$\left[ \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}} \right]^6 \quad \text{ic } \textcircled{3}$$

$\rightarrow \text{ic}$   
 $10-3^x > 0$

$$C_n^{u-1}, C_n^{u-2}, C_n^{u-3} : 2C_n^{u-2} = C_n^{u-1} + C_n^{u-3}$$

$$\frac{2u!}{(u-2)! \cdot 2!} = u + \frac{u!}{(u-3)! \cdot 3!} \Rightarrow u(u-1) = u + \frac{u(u-1)(u-2)}{6}$$

$$6(u-1) = 6 + (u-1)(u-2) \Rightarrow u^2 - 9u + 14 = 0, u = 7$$

$$[\dots]^7 = \dots + C_7^5 \left( \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} \right)^2 \left( \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}} \right)^5 = 21 + \dots$$

$$2^{\lg(10-3^x)} \cdot 2^{(x-2)\lg 3} = 1$$

$$\lg(10-3^x) + \lg 3^{x-2} = 0$$

$$(10-3^x) \cdot 3^{x-2} = 1$$

$$3^x = t : (10-t)t = 9 \Rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, \quad t_2 = 9 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$u=1: a_1 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1 = 9$$

$$a_k = 3 \cdot 2^k + 4k - 1$$

$$a_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} + 4(k+1) - 1$$

$$a_{k+1} = 2a_k - 4k + 5 = 2[3 \cdot 2^k + 4k - 1] - 4k + 5 = 3 \cdot 2^{k+1} + 4k + 3 = 3 \cdot 2^{k+1} + 4(k+1) - 1$$

$\rightarrow \text{ic}$   
: 5/3

ic

$$4 \log_2^2 \cos x + \log_2 (1 + \cos 2x) \geq 3$$

lc 4

$$4 \log_2^2 \cos x + \log_2 (2 \cos^2 x) \geq 3$$

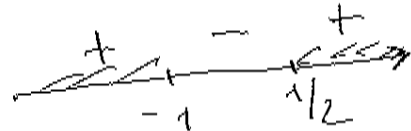
$\cos x > 0 \rightarrow \dots \pi$

$$4 \log_2^2 \cos x + 1 + 2 \log_2 x \geq 3$$

$\log \cos x = t$

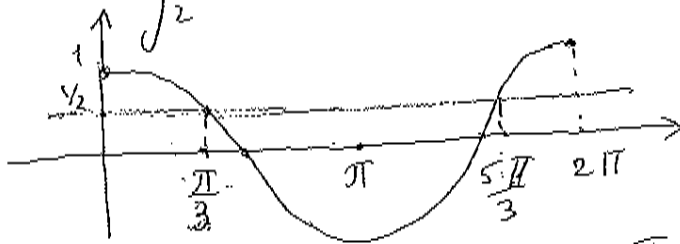
$$4t^2 + 2t - 2 \geq 0$$

$$2t^2 + t - 1 \geq 0$$



$$\log_2 \cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x \geq \sqrt{2} \quad \phi$$

$$\log_2 \cos x \leq -1 \Rightarrow 0 < \cos x \leq \frac{1}{2}$$



$$\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3} \quad \text{lc} \quad \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \text{:-: a l e r}$$

$$\cos^2(x + 40^\circ) + \cos^2(x - 40^\circ) - \sin 10^\circ \cos 2x = 2 \sin 2x \quad \text{:-: 4}$$

$$\frac{1 + \cos(2x + 80^\circ)}{2} + \frac{1 + \cos(2x - 80^\circ)}{2} - \sin 10^\circ \cos 2x = 2 \sin 2x$$

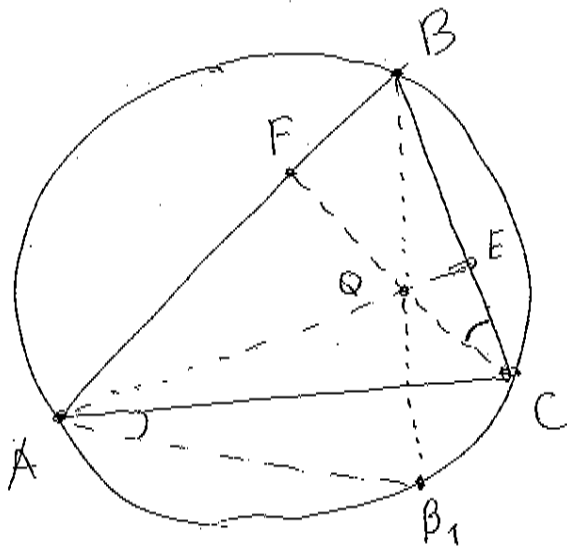
$$1 + \cos 2x \cos 80^\circ - \cos 80^\circ \cos 2x = 2 \sin 2x$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 30^\circ + 360^\circ u, u \in \mathbb{Z} \\ \text{lc} \\ 2x = 150^\circ + 360^\circ u, u \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ u, u \in \mathbb{Z} \quad \text{:-: a l e r}$$

$$\text{lc} \\ x = 75^\circ + 180^\circ u, u \in \mathbb{Z}$$

25



הצג - BQ ש'ה' מ'פ'ון פ'א'ו

(1)  $\triangle CAB_1 = \triangle FCB$  (I.S.)

(2)  $\triangle EAC = \triangle B_1BC$  (---: I.N' )

(3)  $\triangle B_1BC = \triangle CAB_1$  (---: I.N' )

⇓

(4)  $\triangle EAC = \triangle CAB_1$

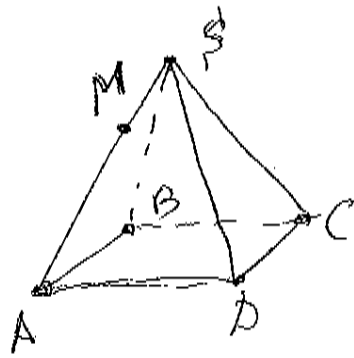
(5)  $\triangle FCB = \triangle EAB$  (---: I.N' )

⇓ (1), (4), (5)

$\triangle EAC = \triangle EAB$

⇓

מ'פ'י ה'י'ה  $\triangle ABC \leftarrow$  מ'פ'י ה'צ'ו'ר פ'ז'י ה'א'י'ז פ'ז' א'ע  
(---: I.N' )



$$\vec{BC} = \{1, 2, -8\}$$

(7)

$$\vec{AB} = \{2, -1, -1\}$$

$$A = (1, 2, -1)$$

$$M = (-1, 2, 1)$$

$$\frac{AM}{MS} = 2 :$$

$$\begin{cases} \frac{1+2x_s}{1+2} = -1 \\ \frac{2+2y_s}{1+2} = 2 \\ \frac{-1+2z_s}{1+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow S = (-2, 2, 2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{10, 15, 5\}$$

$$\{2, 3, -1\} : ||6, 7, 11$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} : SK \cap \Delta ABC \in N . l.c$$

$$2(x-1) + 3(y-2) + 1 \cdot (z+1) = 0 \quad : \text{ס'גורן ה'ע'ל'ע'ן}$$

$$2x + 3y + z - 7 = 0$$

$$2(-2+2t) + 3(2+3t) + 2+t - 7 = 0 \quad : k$$

$$14t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{14} \Rightarrow$$

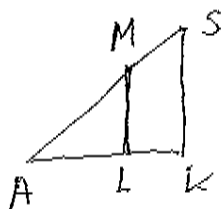
$$x_k = -2 + \frac{6}{14} = -\frac{22}{14}$$

$$y_k = 2 + \frac{9}{14} = \frac{37}{14}$$

$$z_k = 2 + \frac{3}{14} = \frac{31}{14}$$

$$SK = \sqrt{\left(-\frac{22}{14} + 2\right)^2 + \left(\frac{37}{14} - 2\right)^2 + \left(\frac{31}{14} - 2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6^2 + 9^2 + 3^2}}{14} = \frac{\sqrt{36 + 81 + 9}}{14} = \frac{\sqrt{126}}{14}$$



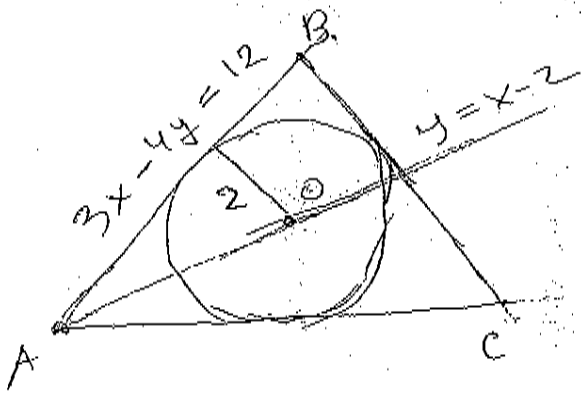
$$\frac{2}{3} = \frac{AM}{AS} = \frac{ML}{SK}$$

ס'גורן ה'ע'ל'ע'ן ה'ע'ל'ע'ן

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{h_1}{h_2} \quad \text{ל'ס'}$$

$$\left(\frac{3}{14}, 11\right) \frac{2}{3} : \text{ס'גורן ה'ע'ל'ע'ן}$$





O(d, β) ; j'alelo y'ana (8)

$$\begin{cases} \beta = d - 2 \\ \frac{|3d - 4\beta - 12|}{5} = 2 \Rightarrow |-d - 4| = 10 \end{cases}$$

$d + 4 = -10 \Rightarrow d = -14$  (soo)  
 $d + 4 = 10 \Rightarrow d = 6, \beta = 4$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$$

AB y'ale =  $\frac{3}{4}$ , AO y'ale = 1

$$\left| \frac{m-1}{1+m} \right| = \left| \frac{\frac{3}{4}-1}{1+\frac{3}{4}} \right| \Rightarrow \left| \frac{m-1}{1+m} \right| = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{m-1}{1+m} = \pm \frac{1}{7}$$

$\frac{m-1}{1+m} = -\frac{1}{7} \Rightarrow -7m + 7 = 1 + m \Rightarrow 6 = 8m \Rightarrow m = \frac{3}{4}$  (AB se)

$\frac{m-1}{1+m} = \frac{1}{7} \Rightarrow 7m - 7 = 1 + m \Rightarrow 6m = 8 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$  (AC se)

A:  $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow (-4, -6) \Rightarrow AC: y + 6 = \frac{4}{3}(x + 4)$   

$$4x - 3y - 2 = 0$$

$P_1(\frac{1}{2}) = 6, P_1(-\frac{1}{2}) = 2 \Rightarrow P_2(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} + 1) \cdot 6 = 9$   
 $P_2(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2} + 1) \cdot 2 = 1$  . a . 8

$P_2(x) = (4x^2 - 1)Q(x) + Ax + B$

$x = \frac{1}{2}: \begin{cases} 9 = \frac{A}{2} + B \\ 1 = -\frac{A}{2} + B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 8 \\ B = 5 \end{matrix}$

$8x + 5$  : : : a l e s t

$$\frac{|z-i|}{|z+1|} \geq 1, \quad z \neq -1$$

(1) (9)

$$\frac{|z-i| \geq |z+1|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2} \geq \sqrt{(x+1)^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2-2y+1 \geq x^2+2x+1+y^2}$$

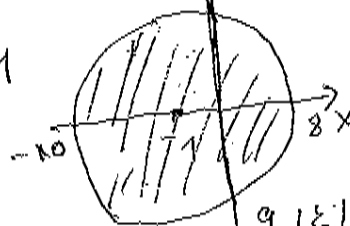
$$x+y \leq 0$$



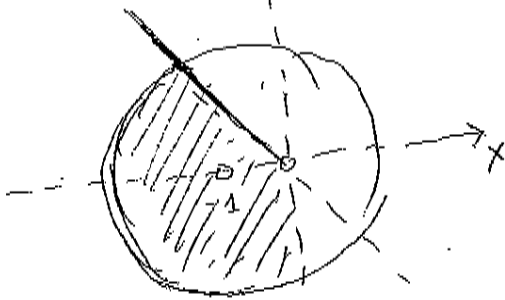
$$\text{Im}(2-iz) = \text{Im}(2-i(x+iy)) = \text{Im}(2+y-ix) = -x > 0$$



$$|z+1| \leq 9 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 \leq 81$$



gleichung für (-1,0) 13 > 9



$$A_8^5 : 9 \text{ l'ic}$$

(2) (9)

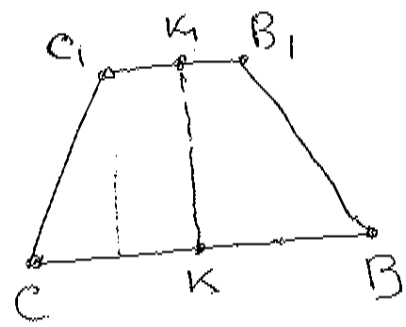
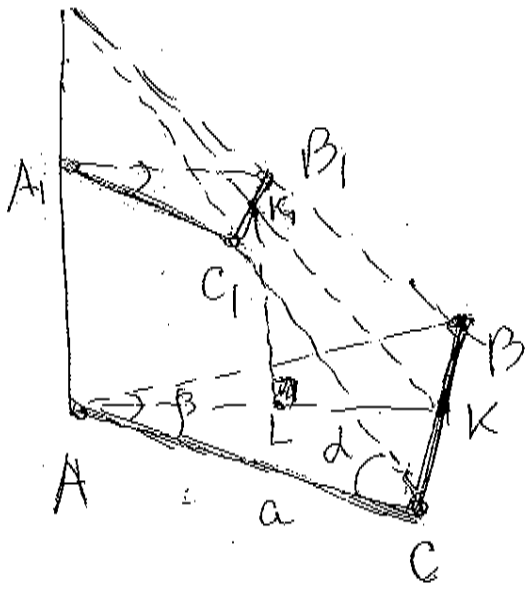
$$4 \cdot A_8^4 : 9 e'$$

(9-1) nicht + N (9-1) 13 > 9

$$A_8^5 + 4 \cdot A_8^4 = \frac{8!}{3!} + 4 \cdot \frac{8!}{4!} = 2 \cdot \frac{8!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 = 13440$$

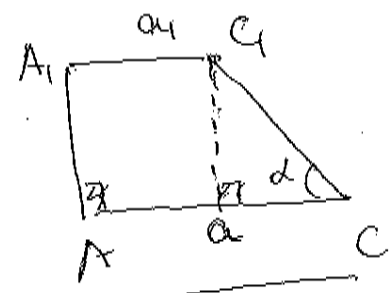
(6)

$AB = AC = a$   
 $A_1B_1 = A_1C_1 = a_1 \quad (a > a_1)$



(c)

$CB = 2a \sin \frac{\beta}{2}$   
 $C_1B_1 = 2a_1 \sin \frac{\beta}{2}$   
 $CC_1 = \frac{a-a_1}{\cos d}$



$h(C_1B_1B) = \sqrt{\frac{(a-a_1)^2}{\cos^2 d} - (a-a_1)^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}$   
 $= (a-a_1) \sqrt{\frac{1}{\cos^2 d} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$

$S_{C_1B_1B} = \frac{1}{2} \cdot (a+a_1) \sin \frac{\beta}{2} (a-a_1) \sqrt{\frac{1}{\cos^2 d} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$   
 $= \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2} (a^2 - a_1^2) \sqrt{\frac{1}{\cos^2 d} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}$

(a)

$AA_1 = (a-a_1) \operatorname{tg} d = KK_1$   
 $LK = a \cos \frac{\beta}{2} - a_1 \cos \frac{\beta}{2} = (a-a_1) \cos \frac{\beta}{2}$

$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(a-a_1) \operatorname{tg} d}{(a-a_1) \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} d}{\cos \frac{\beta}{2}}$

$\left( \begin{array}{l} \Delta KK_1C \cong \Delta KK_1B : BC \perp K_1K \\ \Delta KAC \cong \Delta KAB : BC \perp AK \\ \text{p'lyt'n p'lye'n'ye ja t'n'n} : A_1A = K_1L \end{array} \right)$